Leçon 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

1 Espaces vectoriels normés (Gourdon)

1.1 Rappels

- Équivalence des normes + interprétation topologique
- Exemples normes

1.2 Continuité des applications linéaires

- Quelques équivalences de la continuité des applications linéaires
- Exemple pour montrer que continuité dépend bien de la norme
- Définition de l'espace des fonctions continues, avec sa norme
- Propriété sur norme opérateur + exemples

1.3 Cas de la dimension finie

- Dév 1 : Équivalence des normes en dimension finie + théorème de Riesz
- Les différents corollaires (tout est continue, tout sous espace vectoriel est fermé etc.)
- Contre-exemple des corollaires et application de corollaires

1.4 Cas particulier des matrices

- Exemples des normes possibles + calculs effectifs si possible
- $GL_n(\mathbb{R})$ ouvert dense
- Définition de l'exponentielle + l'exponentielle d'une matrice est un polynôme en cette matrice

2 Banach et Hilbert (Gourdon)

2.1 Généralités

- Définition + Exemple
- Tous les evn de dimension finie sont des Banach
- L'espace des applications linéaires continues en est un si l'espace d'arrivée en est un
- Un ev qui admet une base dénombrable ne peut pas être complet (comme $\mathbb{R}[X]$)
- Une série absolument convergente dans cet espace est convergente
- Application : Si $|||u||| < 1$, Id $- u$ est inversible

2.2 Hilbert

- Définition + Exemples
- Orthogal d'un élément/d'une partie
- Dév 2 : Projection sur un convexe fermé + Propriété sur les orthogonals dd'un sous ev fermé
- Application du théorème (détermination d'une base hilbertienne par exemple)
- Théorème de représentation de Risez